THANK YOU FOR YOUR ORDER

Thank you for your recent purchase. If you need further assistance, please contact Customer Service at help@infotrieve.ca. Please include the Request ID, so we can better assist you.

This is not an invoice.

CUSTOMER INFORMATION

Ordered For:	Valerie
Company:	MCGILL UNIVERSITY
Client ID:	5616
Address:	Central Interlibrary Loans Service / Redpath Libr
	3459 MCTAVISH ST
	MONTREAL, QC H3A0C9
Country:	Canada
Phone:	514/398-4732
Fax:	514/398-7184
Email:	colombo-ill.library@mcgill.ca

ORDER INFORMATION

Request ID:	10622687
Ordered For:	Valerie
Ordered For Email:	colombo-ill.library@mcgill.ca
Ordered:	07/12/2018 3:57 PM
Deliver Via:	Ariel Email
Delivery Address:	colombo-ill.library@mcgill.ca
Tracking Info.:	
	1099381

DOCUMENT INFORMATION

Std. Num.:	09093524
Publication:	Nyt tidsskrift for matematik
Publisher:	
Vol(Iss) Pg:	20 (B) p.33-39
Date	1909
Title:	The theory of probabilities and telephone conversations
Author(s):	Erlang, A. K.
Usage:	1 copy may be used for the following purpose: "Internal General Business Use"

Type:	Doc Del (Journal Article)
Copies:	1
Urgency:	Normal
Genre:	Journal Article
Total Fee:	$11.80

i Planen, som af to givne Keglesnitsbundter skæres i den samme Involution. Vinkelspidserne i den Trekant, de danner, er de tre Skæringspunkter mellem to Keglesnit, et af hvert Bundt, og det fjerde Skæringspunkt er Restpunktet til de $4 + 4$ Punkter, der bestemmer Bundterne. Endepunkterne af hver Trekantside danner et Punktpar i Involutionen paa samme Side.

Sandsynlighedsregning og Telefonsamtaler.

Af A. K. Erlang.

Skønt der i Telefonien paa flere Punkter opstaar Spørgsmaal, hvis Løsning hører under Sandsynlighedsregningen, er denne, saavidt man kan se, hidtil ikke bleven brugt meget paa dette Omraade. I saa Henseende danner det københavnske Telefonselskab en Undtagelse, idet Hr. Telefondirektør F. Johannsen i flere Aar har benyttet Sandsynlighedsregningens Metoder til Løsning af forskellige Opgaver af praktisk Betydning og ligeledes sat andre i Arbejde med Undersøgelser af lignende Art. Da et og andet heraf maaske kan være af Interesse, og da der til Forstaaelsen aldeles ikke kræves særligt Kendskab til Telefonsager, vil jeg meddele det her.

1. Sandsynligheden for et givet Antal Opringninger i et Tidsrum af given Længde.

Det forudsættes, at der ikke er større Sandsynlighed for Opringning paa det ene Tidspunkt end paa ethvert andet. Lad a være den givne Tid, n Middelantallet af Opringninger i Tidsenheden. Vi vil søge Sandsynligheden S_0 for 0 Opringninger i Tiden a og derefter Sandsynligheden S_x for netop x Opringninger i Tiden a. Da

$$\frac{na}{r}$$

er Sandsynligheden for Opringning i Tiden $\frac{a}{r}$, naar r er uendelig stor, er

$$1 - \frac{na}{r}$$

under samme Forudsætning Sandsynligheden for 0 Opringninger i Tiden $\frac{a}{r}$. Man faar da:

(I)
$$S_0 = \lim_{r=\infty} \left(1 - \frac{na}{r}\right)^r = e^{-na}.$$

For nu at finde S_x kan man dele Tiden a i r lige store Dele, hvor $r \geqq x$, og udtage x af disse Dele, hvilket kan gøres paa $K_{r,x}$ Maader. Vi søger nu dels Sandsynligheden for, at der falder 1 Opringning paa hver af de x Dele, dels Sandsynligheden for, at der i den øvrige Tid

$$\frac{a(r - x)}{r}$$

ikke falder Opringninger. Den første Sandsynlighed er, naar r er uendelig stor,

$$\left(\frac{na}{r}\right)^x;$$

den sidste er ifølge I

$$e^{-\frac{na(r-x)}{r}}.$$

Altsaa faar man:

$$S_x = \lim_{r=\infty} K_{r,x} \left(\frac{na}{r}\right)^x e^{-\frac{na(r-x)}{r}},$$

eller, idet

$$\lim_{r=\infty} \frac{K_{r,x}}{r} = \frac{1}{\underline{|x}},$$

(II)
$$S_x = \frac{(na)^x}{\underline{|x}} e^{-na}.$$

Denne Formel bliver simplere, naar man sætter na, Antallet af Opringninger, der gennemsnitlig falder paa Tiden a, lig med m. Man har da:

(III)
$$S_x = \frac{m^x}{\underline{|x}} e^{-m}.$$

2. Fordelingsloven.

Naar man i den fundne Formel lader x antage alle hele Værdier fra 0 opefter, er den Udtrykket for en vis »Fejllov« eller »Fordelingslov«. Man ser straks, at Summen af alle Sandsynlighederne er 1, som den skal være; endvidere, at Sandsynlighederne for et lige og for et ulige Antal Opringninger er henholdsvis

$$\frac{e^m + e^{-m}}{2e^m} \text{ og } \frac{e^m - e^{-m}}{2e^m}.$$

Fordelingslovens Hovedegenskab er den, at alle »Halvinvarianterne« er lig med m; jeg vil herom henvise til T. N. Thiele: Theory of observations (London 1903) og her nøjes med at vise, at Middelfejlskvadratet er m; man faar:

$$\left(\frac{1^2 \cdot m}{\underline{|1}} + \frac{2^2m^2}{\underline{|2}} + \frac{3^2m^3}{\underline{|3}} + \frac{4^2m^4}{\underline{|4}} \cdots\right) e^{-m} - m^2$$

$$= \left(\frac{m^2}{\underline{|1}} + \frac{2m^3}{\underline{|2}} + \frac{3m^4}{\underline{|3}} \cdots + m + \frac{m^2}{\underline{|1}} + \frac{m^3}{\underline{|2}} + \frac{m^4}{\underline{|3}} + \frac{m^5}{\underline{|4}} \cdots\right) e^{-m} - m^2$$

$$= (m^2e^m + me^m)\, e^{-m} - m^2 = m.$$

De simple Forudsætninger, som har ført til den simple Formel III, vil naturligvis ikke altid være opfyldt i Praksis; man kan saaledes tænke sig, at en Forretning i hver Uge har visse travle Dage, svarende til et Middeltal m_1, og mindre travle, svarende til et Middeltal m_2; lad den travle Del af Ugen være p_1, den mindre travle Del p_2, hvor $p_1 + p_2 = 1$. Vil man her udtrykke Variationen i Dagenes Antal Opringninger ved en enkelt Fejllov, finder man, at Middeltallet er

$$p_1m_1 + p_2m_2;$$

men Middelfejlskvadratet er

$$p_1p_2\,(m_1 - m_2)^2$$

større end Middeltallet. Da imidlertid den forrige, simple Teori gennemgaaende viser sig at svare rigtig godt til Erfaringen fra Optællinger, vil vi i det følgende holde os til den.

Lad os tænke os, at en Abonnent har gennemsnitlig m Opringninger aarlig, og at man paa Centralen af praktiske Grunde ikke kan tælle hele Aaret, men kun en Brøkdel α; der bliver da en Forskel mellem det heraf udledte og det virkelige Antal Opringninger i vedkommende Aar; hvor stor er det tilsvarende Middelfejlskvadrat? Man faar:

$$\alpha m \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2 + m(1-\alpha) = \frac{m(1-\alpha)}{\alpha}.$$

3. Ventetiden ved Telefonopringninger.

Vi vil antage, at enhver Telefonistinde modtager Opringningerne fra visse bestemte Abonnenter; Systemet er ikke indrettet paa, at hun kan faa Hjælp af Naboerne, selv om hun har travlt, og de i Øjeblikket er ledige. Vi kan sige, at der gennemsnitlig kommer 1 Opringning i Tidsenheden, idet vi nemlig vælger denne paa passende Maade. Ekspeditionen af en Opringning tager t Tidsenheder. Hvis en Opringning træffer Telefonistinden ledig, vil vi her regne, at der ingen Ventetid bliver (i Virkeligheden gaar der en vis kort Tid, inden Signalet bemærkes). Er hun derimod i Arbejde med at ekspedere, maa den opringende Abonnent vente en vis Tid. Opgaven er nu at bestemme $f(z)$, hvor $f(z)$ skal betyde Sandsynligheden for, at Ventetiden ikke er større end z.

Sandsynligheden for, at den Tid, der i det Øjeblik Opringning finder Sted, er gaaet siden sidste Opringning, ligger mellem Grænserne

$$y \text{ og } y + dy,$$

er $e^{-y}dy$. Sandsynligheden for, at sidstnævnte Opringnings Ventetid har været mindre end $z + y - t$, er

$$f(z + y - t).$$

Herved faas, at

$$f(z) = \int_{y=0}^{\infty} f(z + y - t)\, e^{-y} dy.$$

Denne Ligning giver ved Differentiation med Hensyn til z:

$$f'(z) = \int_{y=0}^{\infty} f'(z + y - t)\, e^{-y} dy,$$

og ved delvis Integration:

$$f(z) = f(z - t) + \int_{y=0}^{\infty} f'(z + y - t)\, e^{-y} dy.$$

Altsaa har man:

$$f'(z) = f(z) - f(z - t). \tag{IV}$$

Ved Integration kan man heraf bestemme $f(z)$ Stykke for Stykke, idet man kan gaa ud fra, at $f(z) = 0$ for $z < 0$, og at $f(z)$ for $z = 0$ skal springe fra 0 til $1 - t$, men for Resten variere uden Spring.

Resultaterne bliver da

$$\begin{aligned} \text{for } 0 &< z < t, \\ t &< z < 2t, \\ 2t &< z < 3t, \\ 3t &< z < 4t, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ nt &< z < (n+1)\, t \end{aligned}$$

henholdsvis:

$$f(z) = (1 - t)\, e^{z}$$

$$f(z) = (1 - t)\left(e^{z} + e^{z-t}(t - z)\right)$$

$$f(z) = (1 - t)\left(e^{z} + e^{z-t}(t - z) + \frac{e^{z-2t}(2t - z)^2}{2}\right)$$

$$f(z) = (1 - t)\left(e^{z} + e^{z-t}(t - z) + \frac{e^{z-2t}(2t - z)^2}{2} + \frac{e^{z-3t}(3t - z)^3}{6}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(z) = (1 - t)\left(e^{z} + \frac{e^{z-t}(t - z)}{\underline{|2}} + \frac{e^{z-2t}(2t - z)^2}{\underline{|2}} \cdots \frac{e^{z-nt}(nt - z)^n}{\underline{|n}}\right).$$

Rigtigheden heraf ser man let ved at indsætte Værdien af $f(z)$, taget fra den sidste af disse Formler, og Værdien af $f(z - t)$, taget fra den næstsidste, i Ligning IV.

Ved den numeriske Beregning begynder man bedst med at danne en Tabel over Funktionen

$$\frac{m^x}{\underline{|x}}\, e^{-m}$$

for negative Værdier af m (f. Eks. med Intervallet 0·1) og for positive hele Værdier af x; hertil kan benyttes en af de foreliggende Tabeller over log $\lfloor x$, af hvilke C. F. Degen: Tabularum enneas (Havniæ 1824) er den ældste og stadig den bedste. I den fremkomne Tabel skal man derpaa summere langs Skraalinier, og Summerne skal multipliceres med $1 - t$; saa har man Værdierne til den endelige Tabel, der giver $f(z)$ som Funktion af z og t. En saadan Tabel er vist nedenfor.

z \ t	·0	·1	·2	·3	·4	·5	·6	·7	·8	·9	1·0
·0	1·000	·900	·800	·700	·600	·500	·400	·300	·200	·100	·000
·1	1·000	·995	·884	·774	·663	·553	·442	·332	·221	·111	·000
·2	1·000	1·000	·977	·855	·773	·611	·489	·366	·244	·122	·000
·3	1·000	1·000	·991	·945	·810	·675	·540	·405	·270	·135	·000
·4	1·000	1·000	·998	·967	·895	·746	·597	·448	·298	·149	·000
·5	1·000	1 000	·999	·983	·923	·824	·659	·495	·330	·165	·000
·6	1·000	1·000	1·000	·992	·947	·856	·729	·547	·364	·182	·000
·7	1·000	1·000	1·000	·996	·965	885	·761	·605	·403	·201	·000
·8	1·000	1·000	1·000	·998	·977	·910	·792	·635	·445	·223	·000
·9	1·000	1·000	1·000	·999	·984	·931	·822	·665	·470	·246	·000
1·0	1·000	1·000	1·000	·999	·990	·947	·849	·694	·495	·261	·000
1·1	1·000	1·000	1 000	1·000	·993	·958	·872	·722	·520	·276	·000
1·2	1·000	1·000	1·000	1·000	·995	·967	·891	·749	·545	·292	·000
1·3	1·000	1·000	1·000	1·000	·997	·975	·906	·773	·569	·307	·000
1·4	1·000	1·000	1·000	1·000	·998	·980	·920	·794	·592	·323	·000
1·5	1·000	1·000	1·000	1·000	·999	985	·932	·812	614	·339	·000
1·6	1·000	1·000	1·000	1·000	·999	·988	·942	·829	·635	·354	·000
1·7	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	·991	·950	·845	·653	·369	·000
1·8	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	·993	·957	.859	·671	·384	·000
1·9	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	·994	·964	·872	·688	·397	·000
2·0	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	·996	·969	·884	·705	·411	·000

4. Ventetiden ved Telefonopringninger (Fordelingssystem).

Medens en Mængde Centraler er indrettede som ovenfor antydet, foretrækker man dog nu Systemer, hvor en Gruppe paa d Telefonistinder er fælles om en Del Abonnenter, enten saaledes, at hver af disses Opringninger straks dirigeres til en i Øjeblikket ledig Dame, eller saaledes, at hver Dame kan lade enhver Opringning, hun modtager, men ikke straks kan ekspedere, gaa over til en i Øjeblikket ledig Dame. En Ventetid fremkommer da kun, naar alle samtidig er optagne.

Lad os antage, at Gruppen paa d Damer har gennemsnitlig 1 Opringning i Tidsenheden; Ekspeditionstiden er t_d, og vi søger Sandsynligheden for en Ventetid mindre end z_d. Til Sammenligning betragter vi saa en Dame, der arbejder alene med gennemsnitlig 1 Opringning i Tidsenheden, Ekspeditionstiden t_1; her kender vi fra det foregaaende Sandsynligheden for en Ventetid mindre end z_1. Vi betegner i begge Tilfælde ved T et Tidsrum af vilkaarlig Længde, umiddelbart forud for en Opringning, og ved x Antallet af Opringninger i nævnte Tidsrum. Man ser nu, at den søgte Sandsynlighed er Sandsynligheden for, at man for ethvert sammenhørende Værdipar T og x har:

$$x \cdot t_d < (T + z_d)\, d + t_d\,(d - 1),$$

medens den tidligere fundne Sandsynlighed er Sandsynligheden for, at man for ethvert sammenhørende Værdipar T og x har:

$$x \cdot t_1 < T + z_1.$$

Nu falder imidlertid de to Uligheder sammen, hvis

$$t_1 = \frac{t_d}{d},$$

og

$$z_1 = z_d + \frac{t_d\,(d-1)}{d}.$$

Altsaa finder man den søgte Sandsynlighed ved at gaa ind i Tabellen ovenfor med disse Værdier som Indgangstal.

Det er en Selvfølge, at det fundne ogsaa kan anvendes paa Telefonforbindelsen mellem to Byer med d indbyrdes Ledninger, naar Samtaletiden er t_d.

Literaturanmeldelser.

Festschrift zur Feier des 200 Geburttages Leonhard Eulers, herausgg. v. dem Verstande der Berliner math. Gesellschaft. (Teubner 1907, Pris M. 5.80).